

**Robert Kowal<sup>1</sup>**

## **PROSTY MODEL ILOŚCIOWEJ OPTYMALIZACJI STRUKTURY KAPITAŁOWEJ**

### **Streszczenie**

*W artykule przedstawiono prosty model dynamiki wartości aktywów spółki pozwalający wyznaczyć jej optymalną strukturę kapitałową. Funkcją celu jest wartość oczekiwana losowej sumy zdyskontowanych dywidend za okres funkcjonowania spółki zależnej od aktywów. Podano analityczny wzór dla tej wielkości otrzymany przy pewnych założeniach. W dodatku przedstawiono praktyczne wyznaczanie optymalnej struktury kapitałowej na podstawie danych rzeczywistych, obejmujących niektóre finansowe mierniki spółki.*

### **Wprowadzenie**

Problem optymalizacji struktury kapitałowej przyciąga uwagę badaczy od momentu ukazania się znakomitej pracy Millera i Modiglianiego<sup>2</sup>. Od tamtej pory w literaturze naukowej pojawiło się wiele teoretycznych i empirycznych badań, które w sposób istotny przyczyniły się do większego i głębszego poznania i zrozumienia tego zagadnienia, notabene niezwykle ważnego z praktycznego punktu widzenia. Większość z nich miała charakter jakościowy, natomiast najbardziej cenne są te badania, które by pozwalały liczbowo ocenić optymalną strukturę kapitałową konkretnej spółki<sup>3</sup>, a tych było wśród nich mniej. W tym artykule zaproponowano

<sup>1</sup> Robert Kowal, Instytut Zarządzania, Wydział Zarządzania i Administracji, Uniwersytet Humanistyczno – Przyrodniczy Jana Kochanowskiego w Kielcach.

<sup>2</sup> Modigliani F., Miller M., 1958, The cost of capital, corporation finance and the theory of investment, *American Economic Review*, 48, 267-297

<sup>3</sup> Philosophov L.V., Philosophov V.L., 1999, Optimization of corporate capital structure. A probabilistic Bayesian approach, *International Review of Financial Analysis*, 8 (Issue 3), 199-214.

prosty, gdyż zależy tylko od struktury kapitałowej stochastyczny model dynamiki w czasie wartości aktywów spółki. Za pomocą aktywów spółki określa się losową sumę zdyskontowanych dywidend w okresie przed bankructwem spółki utożsamianym w naszym przypadku z finansową niewypłacalnością w okresie. W charakterze funkcji celu do wyznaczenia optymalnej struktury kapitałowej posłużyła, zgodnie z podejściem zaproponowanym w pracy<sup>4</sup>, wartość oczekiwana tej sumy. Głównym rezultatem pracy jest otrzymanie wzorów, stosunkowo prostych pozwalających wyznaczyć wartość tej funkcji przy dowolnej strukturze kapitałowej.

Niech  $\tau \geq 1$  będzie dyskretną zmienną losową równą okresowi funkcjonowania spółki na rynku tj. okresowi do bankructwa. Zadanie optymalizacji struktury kapitałowej określamy jako zadanie maksymalizacji funkcji

$$\Phi(\kappa) = E(\sum_{i \leq \tau-1} D(i, \kappa) / (1+r)^i), \quad (1)$$

gdzie:  $E$  – operator wartości oczekiwanej,  $\kappa$  – wskaźnik struktury kapitałowej, określający proporcje długu i kapitału własnego ( $0 \leq \kappa < 1$ ),  $D(i, \kappa)$  – zmienne losowe opisujące dywidendę, którą wypłaci spółka za okres  $i$ ,  $r > 0$  – stopa dyskontowa. W aspekcie takiego wyboru funkcji celu nadmienimy, że wartość oczekiwaną sumy zdyskontowanych przyszłych dywidend utożsamia się w literaturze przedmiotu jako aktualną wartość spółki<sup>5</sup>.

Oznaczmy przez  $b$  ( $0 \leq b \leq 1$ ) część zysku netto nie przeznaczonego na wypłatę dywidend (stopę zysku zatrzymanego), a przez  $E(i, \kappa)$  – zysk netto okres  $i$ . Dywidenda i zysk netto spółki za okres  $i$  związane są następującą zależnością<sup>6</sup>.

$$D(i, \kappa) = (1-b)E(i, \kappa), \quad i \geq 1. \quad (2)$$

Oznaczmy także  $T(i, \kappa)$  – aktywa spółki w okresie  $i$  ( $i \geq 1$ ). Wiadomo, że struktura kapitałowa spółki w okresie  $i$  określona jest przez wskaźnik  $\kappa$  w następujący sposób:  $\kappa T(i, \kappa)$  – zadłużenie spółki i  $(1-\kappa)T(i, \kappa)$  – kapitał własny spółki. W kontekście ogólnym odnotujmy jeszcze, że zadłużenie plus kapitał własny spółki w dowolnym okresie  $i$  są równe aktywom spółki<sup>6</sup>.

Załóżmy, że spółka w żadnym z okresów nie przeprowadza nowych emisji akcji. W tym przypadku kapitał własny w okresie  $i+1$  zwiększa się w porównaniu z kapitałem własnym okresu  $i$  o zysk zatrzymany tj. część zysku  $bE(i, \kappa)$ , nie wypłaconą w postaci dywidendy tj.

$$(1-\kappa)T(i+1, \kappa) = (1-\kappa)T(i, \kappa) + bE(i, \kappa). \quad (3)$$

Stąd otrzymujemy następującą zależność opisującą zmiany aktywów spółki.

Leland H.E., 1998, Agency Costs, Risk Management, and Capital Structure, *The Journal of Finance*, LIII (№4), 1213-1243.

Коваль Р.Я., Наконечный А.Н., 2003, Марковская модель для оптимизации структуры капитала корпорации, *Финансовые риски*, №1, 82-85.

<sup>4</sup> Leland H.E., 1998, Agency Costs, Risk Management, and Capital Structure, *The Journal of Finance*, LIII (№4), 1213-1243.

<sup>5</sup> Leland H.E., 1998, Agency Costs, Risk Management, and Capital Structure, *The Journal of Finance*, LIII (№4), 1213-1243.

Ross S.A., Westerfield R.W., Jordan B.D. & Roberts G.S., 1999, Fundamentals of Corporate Finance (Thd Canadian Ed.), McGraw-Hill, Toronto

<sup>6</sup> Ross S.A., Westerfield R.W., Jordan B.D. & Roberts G.S., 1999, Fundamentals of Corporate Finance (Thd Canadian Ed.), McGraw-Hill, Toronto

$$T(i+1, \kappa) = T(i, \kappa) + bE(i, \kappa)/(1-\kappa). \quad (4)$$

Zysk netto i aktywa spółki związane są zależnością<sup>6</sup>

$$E(i, \kappa) = ROA(i, \kappa)T(i, \kappa), \quad (5)$$

gdzie  $ROA(i, \kappa)$  - zmienna losowa opisująca rentowność aktywów spółki w okresie  $i$ , zależna od struktury kapitałowej. Dlatego zależność (4) może być zapisana w postaci

$$T(i+1, \kappa) = T(i, \kappa)[1 + bROA(i, \kappa)/(1-\kappa)]. \quad (6)$$

lub równoważnie

$$T(i+1, \kappa) = T(1)[1 + bROA(1, \kappa)/(1-\kappa)] \dots [1 + bROA(i, \kappa)/(1-\kappa)], \quad (7)$$

gdzie  $T(1) = T(1, \kappa)$  – aktywa spółki w pierwszym okresie, ogólnie mówiąc, nie zależące od struktury kapitałowej.

Kolejne podstawienia zależności (2), (5) i (7) do 1 pozwalają przekształcić wyjściową funkcję celu do następującej postaci:

$$\Phi(\kappa) = T(1)(1-b)E\{\sum_{1 \leq i \leq \tau-1} ROA(i, \kappa) T(i, \kappa) / [1 + bROA(j, \kappa)/(1-\kappa)] / (1+r)^i\} \quad (8)$$

Teraz określimy moment/okres bankructwa spółki  $\tau$ . Zgodnie z<sup>7</sup> będziemy zakładać, że spółka staje się bankrutem tzn. jest niewypłacalna finansowo, jeżeli w okresie  $i$  operacyjny strumień pieniężny tego okresu jest mniejszy od spłacanej w danym okresie raty kapitałowej i raty odsetkowej<sup>8</sup>. Warunek ten równoważny jest temu, że zysk netto plus odliczenia amortyzacyjne okresu są mniejsze od spłacanego w danym okresie zadłużenia (części)<sup>8</sup>.

Założmy, że odliczenia amortyzacyjne są pewną ustaloną częścią  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) aktywów, to jest są równe  $\alpha T(i, \kappa)$ . Niech spłacane w okresie  $i$  zadłużenie (rata kapitałowa i odsetkowa) określone jest przez parametr  $\beta$  ( $0 \leq \beta \leq 1$ ), to jest równe  $\beta \kappa T(i, \kappa)$ . Uwzględniając, że zysk netto określony jest zależnością (5) warunek bankructwa w okresie  $i$  ma postać:

$$ROA(i, \kappa)T(i, \kappa) + \alpha T(i, \kappa) < \beta \kappa T(i, \kappa). \quad (9)$$

W ten sposób zmienna losowa  $\tau$  w (1) i (8) także wyraża się przez zmienne losowe  $ROA(i, \kappa)$ :

$$\tau = \min\{i \geq 1: ROA(i, \kappa) < \beta \kappa - \alpha\}. \quad (10)$$

I tak, wzory (8) i (10) pozwalają wyrazić oczekiwaną wartość spółki przez stopę zysku zatrzymanego  $b$ , wskaźnik struktury kapitałowej  $\kappa$ , stopę dyskontową  $r$ , udział odliczeń amortyzacyjnych  $\alpha$ , udział spłacanego okresowo (zwykle rocznie) zadłużenia  $\beta$  i ciąg zmiennych losowych  $ROA(i, \kappa)$  – rentowności aktywów spółki. W dalszej części zakładamy, że zmienne losowe  $ROA(i, \kappa)$  są niezależne i mają jednakowy rozkład dla dowolnej wartości parametru  $\kappa$ .

### Główne rezultaty

Oznaczmy przez  $F(t, \kappa)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$  – dystrybuantę rozkładu zmiennej losowej  $ROA(i, \kappa)$ , a przez  $M(\kappa)$  i  $\sigma(\kappa)$  odpowiednio jej wartość oczekiwaną i odchylenie

<sup>7</sup> Коваль Р.Я., Наконечный А.Н., 2003, Марковская модель для оптимизации структуры капитала корпорации, *Финансовые риски*, №1, 82-85.

<sup>8</sup> Ross S.A., Westerfield R.W., Jordan B.D. & Roberts G.S., 1999, Fundamentals of Corporate Finance (Thd Canadian Ed.), McGraw-Hill, Toronto

standardowe. Niech także  $\pi(\kappa) = F((\beta\kappa - \alpha - M(\kappa))/\sigma(\kappa), \kappa)$  będzie prawdopodobieństwem zdarzenia

$\{ROA(i, \kappa) < \beta\kappa - \alpha\}$ , a  $z(\kappa) = \{1 + bM(\kappa)/(1 - \kappa)\}/(1 + r)$ . Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

**Twierdzenie.** Jeżeli dla ustalonej wartości  $\kappa \in [0, 1)$  spełniona jest nierówność

$$(1 - \pi(\kappa))z(\kappa) < 1, \quad (11)$$

to prawdziwa jest równość

$$\Phi(\kappa) = T(1)(1 - b)M(\kappa)\{1 - \pi(\kappa)(1 - \pi(\kappa))/(1 - (1 - \pi(\kappa))z(\kappa))\}/\{(1 - z(\kappa))(1 + r)\} \quad (12)$$

Dowód tego twierdzenia zamieszczony jest w dodatku 1. Formuła ta jest wygodnym narzędziem analitycznym do wyznaczania pewnych wielkości.

#### Przykład optymalizacji struktury kapitałowej

Załóżmy, że  $F(t, \kappa)$  - dystrybuenta rozkładu normalnego, określonego przez odpowiednie wartości oczekiwane podane w tabeli 1 i stałe odchylenie standardowe  $\sigma(\kappa) = 0,13$ . W naszym przypadku wyjściowe do ich konstrukcji dane pochodzą ze sprawozdań finansowych pewnego przedsiębiorstwa za okres 10 lat. Sposób konstrukcji i weryfikacji tej funkcji na podstawie zebranych danych wyjściowych podano w dodatku 2.

Tabela 1

|             |       |      |       |       |       |
|-------------|-------|------|-------|-------|-------|
| $\kappa$    | 0,1   | 0,2  | 0,3   | 0,4   | 0,5   |
| $M(\kappa)$ | 0,086 | 0,08 | 0,074 | 0,068 | 0,062 |

Źródło: opracowanie własne

Przyjmijmy także, że wartości liczbowe pozostałych parametrów modelu są następujące:  $b = 0,8$ ,  $r = 0,12$ ,  $T(1) = 384$ ,  $\alpha = 0,06$ ,  $\beta = 0,2$ .

W tabeli 2 podano wartości  $\pi(\kappa)$  prawdopodobieństw bankructwa spółki, wartości  $z(\kappa)$  i wartości lewej strony warunku (11).

Tabela 2

|                              |            |            |           |         |       |
|------------------------------|------------|------------|-----------|---------|-------|
| $\kappa$                     | 0,1        | 0,2        | 0,3       | 0,4     | 0,5   |
| $\pi(\kappa)$                | $10^{-17}$ | $10^{-15}$ | $10^{-9}$ | 0,00111 | 0,045 |
| $z(\kappa)$                  | 0,961      | 0,964      | 0,968     | 0,973   | 0,981 |
| $(1 - \pi(\kappa))z(\kappa)$ | 0,961      | 0,964      | 0,968     | 0,974   | 0,937 |

Źródło: opracowanie własne

Tabela 3 zawiera wartości funkcji celu (12). Widzimy, że optymalna wartość wskaźnika struktury kapitałowej maksymalizującą wartość spółki jest w przybliżeniu równa 0,4.

Tabela 3

|                |       |       |       |       |      |
|----------------|-------|-------|-------|-------|------|
| $\kappa$       | 0,1   | 0,2   | 0,3   | 0,4   | 0,5  |
| $\Phi(\kappa)$ | 151,6 | 153,6 | 160,4 | 177,3 | 71,9 |

Źródło: opracowanie własne

### Dodatek 1. Dowód twierdzenia

Zauważmy, że zdarzenia  $\{\tau=k\}$ ,  $1 \leq k < \infty$  tworzą zbiór zdarzeń elementarnych. Przechodząc do powtórnych wartości oczekiwanych z warunkowymi wartościami oczekiwany przy warunkach  $\tau=k$  z zależności (8) ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy, że

$$\Phi(\kappa) = T(1)(1-b) \sum_{1 \leq k < \infty} P(\tau=k) \times \\ \times E\{\sum_{1 \leq i \leq \tau-1} ROA(i, \kappa) / \prod_{1 \leq j \leq i-1} [1+bROA(j, \kappa)/(1-\kappa)] / (1+r)^i \mid \tau=k\} \quad (13)$$

gdzie  $E\{\dots \mid \tau=k\}$  – operator warunkowej wartości oczekiwanej. Uwzględniając, że te warunkowe wartości oczekiwane wyrażają się za pomocą  $M(\kappa)$  i  $z(\kappa)$  wzorem

$$E\{\dots \mid \tau=k\} = M(\kappa)[1+z(\kappa)+\dots+z(\kappa)^{k-2}]/(1+r),$$

otrzymujemy, że

$$\Phi(\kappa) = [T(1)(1-b) M(\kappa)] / [(1+r)(1-z)] \sum_{1 \leq k < \infty} \pi(\kappa)(1-\pi(\kappa))^{k-1}. \quad (14)$$

W powyższych przekształceniach wykorzystaliśmy także równość  $P(\tau=k) = \pi(\kappa)(1-\pi(\kappa))^k$ .

Uwzględniając dalej warunek (11) otrzymujemy z (14), że prawdziwa jest równość (12) co kończy dowód.

### Dodatek 2. Rozkład zmiennych losowych ROA(i, κ)

Rozpatrzmy dla przykładu spółkę, której niektóre finansowe mierniki (w mln. zł.) wybrane ze sprawozdań finansowych za okres 10 lat podano w tabeli 4.

Tabela 4

| Lata (i) | Sprzedaż (S(i)) | Koszty (C(i)) | Aktywa (T(i)) | Stopa zadłużenia |
|----------|-----------------|---------------|---------------|------------------|
| 1        | 137,929         | 115,794       | 194,58        | 0,0922           |
| 2        | 136,218         | 111,882       | 206,745       | 0,0874           |
| 3        | 174,729         | 149,546       | 220,811       | 0,0936           |
| 4        | 173,073         | 137,101       | 240,677       | 0,079            |
| 5        | 206,733         | 168,517       | 264,573       | 0,0912           |
| 6        | 229,064         | 193,54        | 283,859       | 0,0774           |
| 7        | 242,329         | 207,282       | 314,68        | 0,0822           |
| 8        | 268,006         | 227,4         | 331,806       | 0,0714           |
| 9        | 285,045         | 234,318       | 352,675       | 0,0811           |
| 10       | 324,542         | 261,588       | 384,115       | 0,0833           |

Źródło: opracowanie własne

Najpierw na podstawie danych z tabeli 4 wyznaczamy średnią stopę zadłużenia, która w naszym przypadku wynosi  $R=0,083$ . Następnie na podstawie tych danych wyznaczamy próby zmiennej losowej  $ROA(i, \kappa)$  dla różnych wartości  $\kappa$ . Do tego celu wykorzystujemy zależność  $ROA(i, \kappa) = [S(i)-C(i)-R\kappa T(i)]/(1-tax)/T(i)$ , jeżeli wyrażenie w nawiasach kwadratowych jest większe od 0 lub  $ROA(i, \kappa) = [S(i)-C(i)-R\kappa T(i)]/T(i)$ , jeżeli wyrażenie w nawiasach kwadratowych jest mniejsze od 0. Wyrażenie w nawiasach kwadratowych przedstawia sobą dochód do opo-

datkowania przy danej strukturze kapitałowej. Rzeczywiście, różnice  $S(i)-C(i)$  określają dochód operacyjny,  $\kappa T(i)$  - zadłużenie spółki,  $R\kappa T(i)$  - odsetki od zadłużenia. Czynniki  $(1-\text{tax})$  zmniejsza dochód do opodatkowania o wielkość stawki podatku dochodowego  $\text{tax}$  (jeżeli wartość dochodu do opodatkowania jest dodatnia). W ten sposób licznik wzoru dla  $ROA(i, \kappa)$  przedstawia sobą zysk netto (lub stratę) spółki, natomiast mianownik jej aktywa.

Dla określenia rozkładu  $ROA(i, \kappa)$  przyjmujemy, że wartość stawki podatku dochodowego wynosi  $\text{tax}=0,3$ .

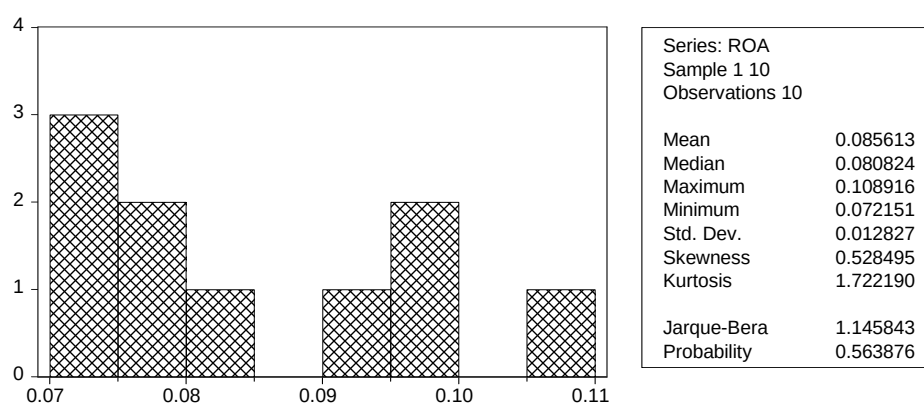
W charakterze ilustracji rozpatrzmy przypadek  $\kappa=0,1$ . Dla tej wartości empiryczne wartości  $ROA(i, \kappa)$  podano w tabeli 5, natomiast histogram i empiryczne charakterystyki - na rysunku 1.

Tabela 5

| I                | 1          | 2          | 3          | 4          | 5          | 6          | 7          | 8          | 9          | 10         |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $ROA(i, \kappa)$ | 0,07<br>38 | 0,07<br>66 | 0,07<br>40 | 0,09<br>88 | 0,09<br>53 | 0,08<br>18 | 0,07<br>22 | 0,07<br>99 | 0,09<br>49 | 0,10<br>89 |

Źródło: opracowanie własne

Rysunek 1



Źródło: opracowanie własne

Przedstawiona na rysunku 1 wartość statystyki Jarque - Bera i odpowiadająca jej wartość testowa p-Value pozwalają stwierdzić, że prawdziwa jest hipoteza zerowa: otrzymana próba ma rozkład normalny. Przy tym średnia wartość  $ROA(i, 0,1)$  jest równa przybliżeniu 0,086, a odchylenie standardowe 0,013. Analogicznie wyznaczamy następne próby i analizujemy histogramy dla pozostałych wartości  $\kappa$ , co pozwala określić brakujące dane z tabeli 1, jak również twierdzić, że  $\sigma(\kappa)=0,13$  dla wszystkich wartości  $\kappa$ , a rozkład  $ROA(i, \kappa)$  - normalny.

## **Bibliografia**

1. Modigliani F., Miller M., 1958, The cost of capital, corporation finance and the theory of investment, *American Economic Review*, 48, 267-297
2. Philosophov L.V., Philosophov V.L., 1999, Optimization of corporate capital structure. A probabilistic Bayesian approach, *International Review of Financial Analysis*, 8 (Issue 3), 199-214.
3. Leland H.E., 1998, Agency Costs, Risk Management, and Capital Structure, *The Journal of Finance*, LIII (№4), 1213-1243.
4. Коваль Р.Я., Наконечный А.Н., 2003, Марковская модель для оптимизации структуры капитала корпорации, *Финансовые риски*, №1, 82-85.
5. Ross S.A., Westerfield R.W., Jordan B.D. & Roberts G.S., 1999, Fundamentals of Corporate Finance (Thd Canadian Ed.), McGraw-Hill, Toronto

## **Abstract**

### ***Simple model for quantitative optimization of capital structure***

*A simple model of changes corporates activities, which enables to determine it's optimal capital structure is presented. The goal function is the expected value of random discounted sum of dividends which depends on activities. A formula for this is obtained under special conditions. The paper is supplied with practical example of determining optimal capital structure on real data.*