



**Gospodarowanie zasobami w regionie
w warunkach zagrożenia**

Tadeusz Klecha¹

**TEORIA NIEZMIENNIKÓW
I TEORIA GRUP W EKONOMII**

1. Wprowadzenie

Ogromna różnorodność działań społecznych i gospodarczych uniemożliwia zastąpienie nauk społecznych i ekonomicznych przez modele fizyki, pozwala jej jednak wyjaśnić przebieg zjawisk społecznych w zawężonych ramach, gdy znane są siły i warunki wyjściowe. W odróżnieniu od zjawisk fizycznych w naukach społecznych siły zewnętrzne są na ogół w istocie siłami wewnętrznymi i na odwrót. Ograniczmy się do modelu, w których można wyjaśnić pewne problemy, np. przepływ kapitału korzystając z modeli fizyki.

W pracach T.A. Klecha², K. Huang³ i H.G. Schuster⁴ sformułowano podstawowe pojęcia potrzebne nam do rozważań w prezentowanej pracy. Są to, układ termodynamiczny, temperatura, parametry termodynamiczne, stan termodynamiczny, proces termodynamiczny, stan układu w ekonomii, równowaga termodynamiczna, równowaga ekonomiczna, stan równowagi termodynamicznej, stan równowagi ekonomicznej, stan niepełnej lokalnej równowagi, entropia, entropia shannonowska, entropia Kołmogorowa, wielkości intensywne, ekstensywne, ekonostat, termostat, potencjały termodynamiczne, potencjały ekonomiczne, przestrzeń fazo-

¹ Dr Tadeusz Klecha, starszy wykładowca, Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie.

² T.A. Klecha, *O istocie kapitału*, Miscellanea Oeconomicae nr 2, Kielce 2006; T.A. Klecha, *Teoria wymiany w ekonomii*, w książce jubileuszowej T. Stanisław, AE, Kraków 2006; T.A. Klecha, *Truesdellowski model kapitału i pieniądza* [w:] *Informacja ekonomiczno-finansowa jako podstawa zarządzania podmiotami gospodarczymi*, WSBiF, Bielsko-Biała 2006.

³ K. Huang, *Mechanika statystyczna*, PWN Warszawa 1978.

⁴ H.G. Schuster, *Chaos deterministyczny*, Warszawa PWN 1995.

wa, układy zachowawcze (element objętości przestrzeni fazowej zmienia w czasie kształt ale zachowuje objętość), renormalizacja⁵, proces różniczkowalny, proces skończenie wymiarowy, strumień fazowy⁶, niezmiennik⁷, tensor, tensor ortogonalny.

W pracach T.A. Klecha⁸ pokazano, że wartość ekonomiczna w $(x_1, x_2, x_3; t)$, entropia mają sens tylko w stanie równowagi. Inspiracją były tu wyniki Maxa Plancka jakie uzyskał w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych XIX w. w problematyce związanej z zerową zasadą termodynamiki⁹.

2. Hydrodynamiczny model kapitału¹⁰

Pełny układ równań dla przepływu kapitału powinien zawierać pięć równań:

- Równanie ciągłości,
- Trzy równania Nawiera–Stockesa
- Równanie zawierające adiabatyczność ruchu (jest to równanie entropii)

oraz odpowiednio sformułowane warunki początkowe i brzegowe.

Ponieważ problem rozwiązania równań Nawiera–Stockesa jest nierozwiązany (problem milenijny) do chwili obecnej, więc w rozpatrywanej pracy ograniczymy się do modelu lepkosprężystego¹¹. Równania ruchu w tym modelu:

(1) $\text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{x}}$ gdzie $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, x_2, x_3; t)$ jest prędkością cząstki kapitału

(2) $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$

\mathbf{T} – tensor naprężeń kapitału

\mathbf{b} – wektor sił zewnętrznych

ρ – gęstość kapitału (masy)

oraz

(3) $\mathbf{T} = (-p + \lambda \text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{D}$ ¹²

p, λ, μ – zależą od ρ . Natomiast λ, μ – oznaczają lepkość dynamiczną i kinematyczną.

Do równań (1) – (3) należy dodać warunki początkowe i brzegowe¹³. W roku 2006 D. Kosiorowski¹⁴ w pracy doktorskiej: „Statystyczne teorie kształtu” potwierdził istnienie naprężeń kapitałowych, w oparciu o model (1) – (3). Obserwu-

⁵ J.J. Biney i inni, *Zjawiska krytyczne*, PWN, Warszawa 1998.

⁶ V. Arnold, *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa 1975.

⁷ J.J. Gelfand; *Rachunek wariacyjny*, Warszawa, PWN 1975; *Wielka Encyklopedia Matematyki* w 5- ciu tomach (w rosyjskim) Moskwa, Nauka, 1979-1985.

⁸ T.A. Klecha, *O naprężeniach kapitału*, Studia i Prace Wydawnictw Naukowych Ekonomii i Zarządzania, Uniwersytetu Szczecińskiego 11, 2008, (195-207), Szczecin 2008; T.A. Klecha, *Teoria wymiany...*, op. cit., T.A. Klecha, *Truesdellowski model kapitału II; Informacja ekonomiczno finansowa*, WSBiF Bielsko-Biała 2007.

⁹ M. Planck, *Gluchgewichtsmstanstande isotroper Körper In werschiedenen Temperaturen*, München Th. Ackermann 1880; M. Planck; *Vorlesungen über Thermodynamic*, Berlin 1897.

¹⁰ L.D. Landau, J.M. Lipszyc, *Hydrodynamika*, Warszawa, PWN 2009.

¹¹ C. Truesdell, *First course national continuum, mechanics*, The Hopkins University Baltimore, Maryland 1972.

¹² Por. *ibidem*.

¹³ Por. T.A. Klecha, *Modele równowagowe w opisie procesów ekonomicznych* (2009), w druku.

¹⁴ Por. D. Kosiorowski, *Statystyczna teoria kształtu*, praca doktorska, A.E. Kraków 2006.

jąc rzeczywistość finansową możemy stwierdzić, że dwa różne kapitały K_1 , K_2 na ogół zachowują się inaczej pod działaniem tych samych sił zewnętrznych. Zatem siły wewnętrzne muszą się także różnić, a więc ogólne zasady (prawa) dotyczące przepływu kapitału nie wystarczą do wyznaczania sił działających w obrębie kapitału w danym ruchu.

Innym zadaniem, które jest widoczne jest przedstawienie różnorodności kapitału. W tym celu konstruujemy równanie tworzące, które wyznaczają naprężenia. Ogólną teorię równań tworzących (konstrytywnych) można oprzeć na trzech zasadach¹⁵. Są to:

- a) Zasada determinizmu
- b) Zasada lokalnego działania
- c) Zasada niezależności.

Doświadczenie uczy nas że dwie cząstki kapitału zbudowane z różnych substancji np. cząstka kapitału składająca się z pieniędzy, a cząstki kapitału wypełnione elementami kapitałów rzeczowych zachowują się inaczej pod działaniem tych samych sił zewnętrznych. Tym samym siły wewnętrzne też są różne. Zatem te dwie cząstki są substancjami różnorodnymi (różnorodność substancji kapitału). Więc istnieje potrzeba przedstawienia różnorodności cząstek kapitału. Konstruuje się w tym celu równania tworzące.

Zasada determinizmu polega na tym że naprężenia wyznaczone są przez historię ruchu kapitału.

$$(4) \mathbf{T}(X,t) = \mathbf{F}(\chi;X,t)$$

gdzie:

\mathbf{F} – jest funkcjonalem ruchu χ

X – cząstka kapitału

t – czas

χ – ruch kapitału

Zasada lokalnego działania. Ruch zachodzący na zewnątrz dowolnie małego otoczenia cząstki kapitału można pominąć podczas wyznaczania naprężenia działającego na tę cząstkę.

Zasada niezależności, polega na tym, że dowolni dwaj obserwatorzy ruchu kapitału stwierdzają to samo naprężenie.

Zdaniem autora jest to najciekawsza zasada niezależności, ponieważ definiuje w teorii kapitału **niezmiennik**.

Pojęcie takie jak niezmiennik (inwariant) robiło zawrotną karierę w XIX wieku od chwili, gdy w Getyndze pojawiły się słynne seminaria czwartkowe zaczynające się o 15⁰⁰ prowadzone przez Hilberta, Kleina, Minkowskiego i Leivicivę. Getynga była wtedy Mekką uczonych. Byli tu między innymi Steinhaus, teorioliczbowiec Landau, czy najwybitniejsza matematyczka tamtego okresu Nēter. W programie

¹⁵ Por. T.A. Klecha, *Truesdellowski model...*, op. cit.; T.A. Klecha, *Truesdellowski model kapitału II; Informacja ekonomiczno finansowa*, WSBiF Bielsko-Biała 2007; C. Truesdell; *First course...*, op. cit.

geometrii F. Kleina użyto teorii niezmienników do klasyfikacji krzywych i form kwadratowych z nimi związanych, itp. Historia Getyngi tamtego okresu to znakomity ośrodek naukowy z matematyki, fizyki, chemii itp.

Dużą rolę w rozwinięciu teorii niezmienników odegrały twierdzenia Nöter (1918). Teoria niezmienników dzisiaj to bardzo silnie rozwijająca się dyscyplina. Są także takie pojęcia badane jak inwariantna statystyka, inwariantne potęgowanie, inwariantne całkowanie itp. Wracając do niezmienników związanych z zasadą niezależności można powiedzieć:

Jeżeli $\chi(X,t)$ jest ruchem widzianym przez pierwszego obserwatora a $\chi'(X,t')$ – widzianym przez drugiego to można dowieść, że:

$$(5) \quad \chi' = \mathbf{Q}\chi + \mathbf{c}, \quad t' = t - a$$

gdzie \mathbf{Q} jest niezależnym od czasu ortogonalnym tensorem, \mathbf{c} – niezależnym od czasu wektorem, a – stałą.

Relacja (5) oznacza, że żądamy niezmienniczości równań opisujących przepływ kapitału względem tej transformacji. Podobną rolę spełnia zasada względności Galileusza w mechanice. Można ją sformułować jako żądanie niezmienniczości równań ruchu mechaniki Newtonowskiej według tej transformacji¹⁶.

Odnieśmy się do mechaniki racjonalnej Truesdella. Truesdell wraz z grupą swoich współpracowników dokonali klasyfikacji cieczy, gazów, ciał stałych korzystając z teorii grup izotropii. Zdaniem autora można dokonać także podobnej klasyfikacji kapitału w oparciu o teorię grup itp. Odpowiedź na to pytanie jest silnie związana z niezmiennikami pewnych grup przekształceń¹⁷.

W modelu hydrodynamicznym jak już stwierdziliśmy, pełny układ równań dla przepływów kapitału powinien zawierać pięć równań, oraz warunki brzegowe i początkowe. Jest więc nadzieja, że układ ten, jeżeli siły zewnętrzne i wewnętrzne działają niezależnie, da się rozwiązać przy danych warunkach początkowych i brzegowych. Jest jednak jedno ale: otóż odpowiedniki sił zewnętrznych w przestrzeni socjologicznej, ekonomicznej, prawnej itd. są w istocie siłami wewnętrznymi i odwrotnie. Cechy zainteresowania wartościami sterującymi i determinującymi życie społeczne na ekonomii i prawie są to siły zewnętrzne, które także są wewnętrznymi. Mody, zainteresowania, wartościowania sterujące i determinujące życie społeczne, ekonomiczne i prawne są siłami zewnętrznymi, które są także siłami wewnętrznymi. Tu jest podstawowy problem ekonomiczny. Jeżeli równanie przepływu kapitału da się rozwiązać jest to ogromny sukces. Np. procesy finansowe są bliskie determinizmowi, z którym mamy do czynienia w mechanice. Przepływ kapitału, podobnie jak w fizyce przepływ ciepła przemieszcza się za pomocą równań przewodnictwa kapitału (równanie Fouriera). Przykładem jest tu operator Scholesa – Blacka w którym, przepływ kapitału zależy od ceny opcji.

Cząstka kapitału może być sama ze sobą izomorficzna w sposób nie trywialny. To znaczy mogą istnieć dwie różne konfiguracje κ i $\bar{\kappa}$ takie, że reakcje cząstki \mathbf{X} po jej odkształceniu są takie same. Niech \mathbf{H} będzie unimodularnym tensorem

¹⁶ Por. L.D. Landau, J.M. Lifszyc; *Mechanika*, Warszawa, PWN 2008.

¹⁷ Por. *Wielka Encyklopedia Matematyki w 5- ciu tomach* (w rosyjskim) Moskwa, Nauka, 1979-1985.

o $\det H = \pm 1$ takim, że: $G(F(\tau))=G(F(\tau)H)$ gdzie $G(F(\tau))$ jest funkcjonalem tworzącym zależnym od κX i t .

Zbiór wszystkich tensorów unimodularnych H tworzy grupę izotropii w punkcie X względem konfiguracji odniesienia κ Elementy tej grupy generują wszystkie odkształcenia otoczenia X w κ

Uwaga: np. równanie tworzące substancji tzw. prostej są postaci

$$T = G_{\tau}^{-1} \cdot F(\tau)$$

Z rozważań powyższych wynika, że można kapitał i jego przepływ analizować za pomocą teorii grup badając niezmienniki odpowiednich obiektów.

Bibliografia:

1. Arnold V., *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa 1975.
2. Biney J.J. i inni, *Zjawiska krytyczne*, PWN, Warszawa 1998.
3. Gelfand J.J.; *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1975.
4. Huang K., *Mechanika statystyczna*, PWN, Warszawa 1978.
5. Klecha T.A., *Modele równowagowe w opisie procesów ekonomicznych* (2009), w druku.
6. Klecha T.A., *O istocie kapitału*, Miscellanea Oeconomicae nr 2, Kielce 2006.
7. Klecha T.A., *O naprężeniach kapitału*. Studia i Prace Wydawnictw Naukowych Ekonomii i Zarządzania, Uniwersytetu Szczecińskiego 11, 2008, (195-207), Szczecin 2008.
8. Klecha T.A., *Teoria wymiany w ekonomii*, w książce jubileuszowej T. Stanisz, AE, Kraków 2006.
9. Klecha T.A., *Truesdellowski model kapitału i pieniądza* [w:] *Informacja ekonomiczno-finansowa jako podstawa zarządzania podmiotami gospodarczymi*, WSBiF, Bielsko-Biała 2006.
10. Klecha T.A., *Truesdellowski model kapitału II; Informacja ekonomiczno finansowa*, WSBiF Bielsko-Biała 2007.
11. Kosiorowski D., *Statystyczna teoria kształtu*, praca doktorska 2006, A.E. Kraków.
12. Landau L.D., Lipszyc J.M., *Hydrodynamika*, PWN, Warszawa 2009.
13. Landau L.D., Lipszyc J.M., *Mechanika*, PWN, Warszawa 2008.
14. Planck M., *Gluchgewichtsmstanstande isotroper Körper In werschiedenen Temperaturen*, München Th. Ackermann 1880.
15. Planck M., *Vorlesungen über Thermodynamic*, Berlin 1897.
16. Schuster H.G., *Chaos deterministyczny*, PWN, Warszawa 1995.
17. Truesdell C., A. *First course national continuum, mechanics*, The Hopkins University Baltimore, Maryland 1972.
18. *Wielka Encyklopedia Matematyki* w 5-ciu tomach (w rosyjskim) Moskwa, Nauka, 1979-1985.

Abstrakt

W artykule przedstawiono założenia hydrodynamicznego modelu kapitału. Zwrócono szczególną uwagę na teorię niezmienników (inwariantów) opisując w zarysie jej historię i rozwój, oraz jej znaczenie dla prezentowanego modelu. Zgodnie z założeniem, które pozwala fizyce wyjaśnić przebieg zjawisk społecznych w zawężonych ramach, gdy znane są siły i warunki wyjściowe autor zapre-

zentował układ pięciu równań (Równanie ciągłości, Trzy równania Nawiera – Stockesa, Równanie zawierające adiabaticzność ruchu) oraz odpowiednio sformułowane warunki początkowe i brzegowe. Na podstawie rozważań wykazał, że można kapitał i jego przepływ analizować za pomocą teorii grup badając niezmienniki odpowiednich obiektów.

The invariant theory, and the group theory in economics

The article presents the assumptions of a hydrodynamic model of capital. Special attention has been paid to the invariant theory (invariants) outlining its history, development and significance for the presented model. In accordance with the assumption which allows physics to explain the course of social phenomena in a narrow range, if forces and initial conditions are known, the author presents a set of five equations (continuity equation, Navier-Stokes' three equations, equation including adiabaticity of movement), as well as appropriately formulated the initial and shoreline conditions. On the basis of these considerations the author proved that the capital and its flow can be analyzed by means of the group theory through examining the invariants of suitable objects.

PhD Tadeusz Klecha, senior lecturer, Cracow University of Economics.